

RİYAZİYYAT

УДК 519.622

**ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА АДАМСА К РЕШЕНИЮ
ИНТЕГРАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ТИПА ВОЛЬТЕРРА****Г.Ю.МЕХТИЕВА, Р.Р.МИРЗОЕВ, А.М.ГУЛИЕВА, Т.М.АСКЕРОВ**
Бакинский Государственный Университет
taleh_74@mail.ru

Существуют некоторые классы методов для решения интегральных уравнений Вольтерра второго рода. Однако, каждый из этих методов имеет свои преимущества и недостатки. Предложенный здесь метод отличается тем, что при его построении используются известные методы Адамса. Если учесть, что существует класс методов Адамса, то преимущество такого подхода очевидно. Построены конкретные методы и алгоритм для применения их к решению модельного интегрального уравнения типа Вольтерра.

Ключевые слова: метод Адамса, интегральное уравнение Вольтерра, задача Коши, гибридные методы.

Как известно, решения многих задач естествознаний сводятся к решению интегральных уравнений. Среди них наиболее популярными являются интегральные уравнения типа Вольтерра. Найти точное решение таких уравнений, даже в линейном случае, удается не всегда. Поэтому для решения интегральных уравнений типа Вольтера, в основном, используются приближенные методы. Среди приближенных методов наиболее часто применяемыми к решению интегральных уравнений, являются численные методы. Одним из известных численных методов для решения интегральных уравнений является метод квадратур. Сам основоположник теории интегральных и интегро-дифференциальных уравнений Вито Вольтерра для нахождения приближенных решений интегрального уравнения с переменными границами использовал метод квадратур (см. напр. [1]). Поскольку Вольтерра фундаментально исследовал линейное

интегральное уравнение, естественно, что он применил метод квадратур к решению линейного интегрального уравнения с переменными границами (см. напр. [2]). Отметим, что метод квадратур и сейчас применяется к решению нелинейного интегрального уравнения Вольтерра. Рассмотрим следующее нелинейное интегральное уравнение Вольтерра:

$$y(x) = f(x) + \int_{x_0}^x K(x, s, y(s)) ds, \quad x_0 \leq s \leq x \leq X. \quad (1)$$

Предполагаем, что достаточно гладкие функции $f(x)$ и $K(x, s, y)$ определены в некотором замкнутом множестве. А также предполагаем, что уравнение (1) имеет единственное решение $y(x)$, которое определено на отрезке $[x_0, X]$. Для нахождения приближенных значений решения уравнения (1) функции $y(x)$, отрезок $[x_0, X]$ разбиваем на N -равных частей с помощью точек $x_i = x_0 + ih$ ($i = 0, 1, 2, \dots$). Здесь постоянный параметр $0 < h$ - является шагом разбиений отрезка $[x_0, X]$ на N равных частей. Обозначим через y_i - приближенные, а через $y(x_i)$ - точные значения решения $y(x)$ уравнения (1) в точках x_i ($i = 0, 1, 2, \dots$).

К исследованию уравнения (1) посвящен ряд работ разных авторов, в которых рассмотрены определения условий для существования и единственности решения, нахождения приближенно-аналитических или численных решений уравнения (1) (см. напр. [3]-[17]). Некоторые авторы, используя связь между обыкновенными дифференциальными уравнениями и интегральными уравнениями Вольтерра к решению последнего предложили использовать сплайн функции, методы коллокации, метод конечных элементов, метод Рунге-Кутты и т.д. В этой работе для численного решения уравнения (1) предлагается использовать экстраполяционный и интерполяционный методы Адамса.

Построение методов типа Адамса для решения уравнения (1)

Как было отмечено выше, классическим методом решения уравнения (1) является метод квадратур, который при применении к решению интегрального уравнения Вольтерра второго рода в одном варианте имеет следующий вид:

$$y_n = f_n + h \sum_{i=1}^n A_i K(x_n, x_i, y_i), \quad (2)$$

здесь величины A_i ($i = 1, 2, \dots, n$) являются коэффициентами метода квадратур, а $f_m = f(x_m)$ ($m \geq 0$). Как видно из формулы (2), если предположим известность значений величин y_1, y_2, \dots, y_n , то при применении метода квадратур для вычисления значений y_{n+1} сумма в формуле (2) вы-

числяется заново, поскольку в нем участвуют величины $K(x_{n+1}, x_i, y_i)$. В отличие от метода (2), здесь предлагаем метод, который освобожден от указанных недостатков за счет использования известных значений $y_{n-k}, y_{n-k+1}, \dots, y_n$ в линейной части предложенного метода. С этой целью уравнение (1) запишем в следующем виде:

$$y(x_{n+1}) = f(x_{n+1}) + \int_{x_0}^{x_{n+1}} K(x_{n+1}, s, y(s)) ds = y(x_n) + f_{n+1} - f_n + \int_{x_n}^{x_{n+1}} K(x_{n+1}, s, y(s)) ds + h \int_{x_0}^{x_n} K'_x(\xi_n, s, y(s)) ds, \quad x_n < \xi_n < x_n + h. \quad (3)$$

При использовании формулы (3) основная трудность связана с вычислением интеграла:

$$h \int_{x_0}^{x_n} K'_x(\xi_n, s, y(s)) ds. \quad (4)$$

С целью вычисления интеграла (4) рассмотрим следующее равенство

$$y'(x) = f'(x) + K(x, x, y(x)) + \int_{x_0}^x K'_x(x, s, y(s)) ds. \quad (5)$$

Если в равенстве (5) положим $x = \xi_n$, то имеем:

$$h \int_{x_0}^{x_n} K'_x(\xi_n, s, y(s)) ds = h(y'(\xi_n) - f'(\xi_n)) - hK(\xi_n, \xi_n, y(\xi_n)) - h \int_{x_n}^{\xi_n} K'_x(\xi_n, s, y(s)) ds. \quad (6)$$

Рассмотрим следующее выражение:

$$\int_{x_n}^{x_{n+1}} K(x_{n+1}, s, y(s)) ds - h \int_{x_n}^{\xi_n} K'_x(\xi_n, s, y(s)) ds = \int_{\xi_n}^{x_{n+1}} K(x_{n+1}, s, y(s)) ds + \int_{x_n}^{\xi_n} K(x_n, s, y(s)) ds. \quad (7)$$

Учитывая (5)-(7) в равенстве (3), затем, заменяя $\varphi'(\xi_n)$ производные и значения величин $K(\xi_n, \xi_n, y(\xi_n))$ некоторой суммой, имеем:

$$y_{n+1} = y_n + f_{n+1} - f_n + h \sum_{j=0}^k \sum_{i=0}^j \beta_i^{(j)} K(x_{n+1-j}, x_{n+1-i}, y_{n+1-i}). \quad (8)$$

Очевидно, что при $h \rightarrow 0$ интеграл (4) стремится к нулю. Однако, выше мы определили порядок сходимости интеграла (4) к нулю. Коэффици-

коэффициенты $\beta_i^{(j)}$ ($i \geq 0; j \geq 0$) подбираем так, чтобы порядок сходимости интеграла (4) к нулю совпадал с точностью метода (8).

Для сравнения метода (8) с методами Адамса, рассмотрим случай $K(x, s, y) = \varphi(s, y)$. Тогда из равенств (5) имеем:

$$y'(x) = f'(x) + \varphi(x, y), \quad y(x_0) = f(x_0), \quad x_0 \leq x \leq X. \quad (9)$$

Полученный метод является задачей Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений. Метод Адамса в одном варианте для решения задачи (9) может быть записан в следующем виде:

$$y_{n+1} = y_n + f_{n+1} - f_n + h \sum_{i=-k+1}^1 \beta_i \varphi_{n+i}. \quad (10)$$

Очевидно, что при построении методов типа (8), основная трудность заключается в определении значений коэффициентов $\beta_i^{(j)}$. С этой целью можно использовать схемы, изложенные в работе [17]. Однако, для построения методов типа (8), здесь мы будем использовать известные методы Адамса, которые можно найти в ученых пособиях. В качестве примера рассмотрим следующий метод трапеции:

$$y_{n+1} = y_n + h(y'_n + y'_{n+1})/2.$$

Соответствующий метод для решения уравнения (1) на базе метода трапеции может быть построен в следующем виде:

$$y_{n+1} = y_n + f_{n+1} - f_n + h(K(x_n, x_n, y_n) + K(x_{n+1}, x_n, y_n) + 2K(x_{n+1}, x_{n+1}, y_{n+1}))/4. \quad (11)$$

Очевидно, что метод (11) является неявным. Поэтому для применения метода (11) к решению конкретных задач можно использовать схемы прогноза-коррекции и в качестве метода прогноза можно использовать следующий метод:

$$\hat{y}_{n+1} = y_n + h(K(x_{n+1}, x_n, y_n) + K(x_n, x_n, y_n))/2.$$

Для построения более точных методов, можно использовать метод Симпсона. Тогда имеем:

$$y_{n+2} = y_n + h(K(x_{n+2}, x_{n+2}, y_{n+2}) + 2K(x_{n+1}, x_{n+1}, y_{n+1}) + 2K(x_{n+2}, x_{n+1}, y_{n+1}) + 2K(x_{n+1}, x_n, y_n) - K(x_n, x_n, y_n))/3. \quad (12)$$

Построим алгоритм для использования метода (12).

ВВОД граничные точки x_0, X ; начальное значение y_0 ; функции $f(x)$ и $K(x, s, y)$; положительное целое N .

ВЫВОД аппроксимация y_n на $y(x_n)$ при N значениях x .

ШАГ 1 $h = (X - x_0)/N$;

ШАГ 2 Для $n = 0, 1, 2, \dots, N - 2$ выполнить Шаги 3-10.

ШАГ 3 $x_n = x_0 + nh$.

ШАГ 4 Вычислить

$$\hat{y}_{n+1} = f_{n+1} - f_n + y_n + h(K(x_{n+1}, x_n, y_n) + K(x_n, x_n, y_n)) / 2.$$

ШАГ 5 Вычислить

$$y_{n+1} = f_{n+1} - f_n + y_n + h(K(x_n, x_n, y_n) + K(x_{n+1}, x_n, y_n) + 2K(x_{n+1}, x_{n+1}, \hat{y}_{n+1})) / 4.$$

ШАГ 6 Вычислить

$$\tilde{y}_{n+2} = f_{n+2} - f_n + y_n + h(K(x_{n+2}, x_{n+1}, y_{n+1}) + K(x_{n+1}, x_{n+1}, y_{n+1})).$$

ШАГ 7 Вычислить

$$\bar{y}_{n+2} = f_{n+2} - f_n + y_n + h(2K(x_{n+2}, x_n, y_n) - K(x_{n+1}, x_n, y_n) - K(x_n, x_n, y_n) + 3K(x_{n+1}, x_{n+1}, y_{n+1}) + K(x_{n+2}, x_{n+1}, y_{n+1}) + K(x_{n+2}, x_{n+2}, \tilde{y}_{n+2})) / 3.$$

ШАГ 8 Вычислить

$$y_{n+2} = f_{n+2} - f_n + y_n + h(K(x_{n+2}, x_{n+2}, \bar{y}_{n+2}) + 2K(x_{n+1}, x_{n+1}, y_{n+1}) + 2K(x_{n+2}, x_{n+1}, y_{n+1}) + 2K(x_{n+1}, x_n, y_n) - K(x_n, x_n, y_n)) / 3.$$

ШАГ 9 Вычислить $\varepsilon_{n+2} = |y(x_{n+2}) - y_{n+2}|$.

ШАГ 10 ВЫВОД (y_{n+2} ; ε_{n+2}).

ШАГ 11 СТОП.

Рассмотрим примеры по применению метода (12).

Пример 1. Решим уравнение $y(x) = \int_0^x \frac{1+y^2(s)}{1+s^2} ds$, $x \in [0,1]$, точное

решение которого $y(x) = x$. Возьмем $h = 0.1$ и, используя последний алгоритм, получим $\varepsilon_{10} = 1.847 \cdot 10^{-3}$.

Пример 2. $y(x) = 1 + \int_0^1 y(s) ds$, $x \in [0,1]$, точное решение $y(x) = e^x$.

Возьмем $h = 0.1$. Тогда полученная погрешность будет равна $\varepsilon_{10} = 2.081 \cdot 10^{-4}$.

Результаты размещены в следующей таблице:

n	x_n	Пример 1	Пример 2
1	0.10	0.0001667097524869	0.0000191209610371
2	0.20	0.0003342988542716	0.0000275434615415
3	0.30	0.0005037360656066	0.0000383321929619
4	0.40	0.0006760920321538	0.0000518192835621
5	0.50	0.0008525500003578	0.0000683369678002
6	0.60	0.0010344176597812	0.0000882170982445
7	0.70	0.0012231402308971	0.0001117923606098

8	0.80	0.0014203149293417	0.0001393990700809
9	0.90	0.0016277069513890	0.0001713813214079
10	1.00	0.0018472671406249	0.0002080961843300

Вывод. Здесь мы описали одну схему для построения метода типа квадратурных, не имеющий недостатки, подобные недостаткам метода квадратур. Известно, что один из основных вопросов заключается в нахождении значений коэффициентов, который здесь решается с использованием коэффициентов методов Адамса. Выше подобранные методы являются неявными. Известно, что эти методы обычно бывают более точными, чем явные методы. Однако, при их использовании возникают трудности в определении решений нелинейных уравнений, которые в данной работе решаются с помощью схемы прогноза-коррекции. Мы считаем, что результат данной работы является перспективным.

ЛИТЕРАТУРА

1. Polishuk Ye. M., Volterra Vito. Leningrad, Nauka, 1977, 114 p.
2. Volterra V. Theory of Functional and of integral and Integro-differential Equations, Dover Publications. Ing, New York, 1959, 304 p.
3. Mamedov Y.D., Ashirov S.A. (1980). Methods of Successive Approximations for the Solution of Operator Equations. Ashgabat, 120 p.
4. Krasnoselskiy M.A. (1969). The Approximate Solution of Operator Equations. M., Nauka, 210 p.
5. Mamedov Ya.D., Musayev V.A. Investigation of Solutions of Nonlinear Operator Equations of Fredholm-Voltaire. Dokl., No6, 1985, 284 p.
6. Atkinson K.E. (1992). A Survey of Numerical Methods for Solving Nonlinear Integral Equations. J. of Integral Equations and Applications, No 1, v.4, p p. 15-46.
7. Brunner H. Implicit Runge-Kutta Methods of Optimal Order for Volterra Integro-Differential Equation. Mathematics of Computation, v. 42, No 165, January 1984, pp. 95-109.
8. Lubich Ch. "Runge-Kutta theory for Volterra and Abel Integral Equations of the Second Kind" Mathematics of Computation. v. 41, No 163, July 1983, pp. 87-102.
9. Linz P. Linear Multistep methods for Volterra Integro-Differential Equations, Journal of the Association for Computing Machinery, v.16, No2, April 1969, pp. 295-301.
10. Shampine L. F. Solving Volterra Integral Equations with ODE Codes. IMA J. Numer. Anal., v.8, №1, 1988, pp. 37-41.
11. Wolkenfelt P. H. M. The Construction of Reducible Quadrature Rules for Volterra Integral and Integro-Differential Equations IMA J. Numer. Anal., v. 2, No2, 1982, pp.131-152.
12. Manzhurov A.V., Polyanin A.D. (2000). Handbook of Integral Equations: Methods of solutions. Moscow: Publishing House of the "Factorial Press", 384 p.
13. Verlan A.F., Sizikov V.S. Integral Equations: Methods, Algorithms, Programs. Kiev, Naukova Dumka, 1986, 544 p.
14. Mehdiyeva G. Yu., Imanova M. N., Ibrahimov V. R. On one Application of Forward Jumping Methods. Applied Numerical Mathematics, v. 72, October 2013, pp. 234-245.
15. Jennifer Scott nee Dixon and Sean Mckee. On the Exact Order of Convergence of Discrete Methods for Volterra-type Equations. IMA J Numer. Anal., v.8, No4, 1988, pp. 511-515.
16. Mehdiyeva G., Imanova M. On an Application of the Finite-Difference Method. Bulletin of the University, No2, 2008, pp. 73-78.

17. Мехтиева Г.Ю., Ибрагимов В.Р., Иманова М.Н. Об одной модификации метода квадратур. Вестник Бакинского Университета, серия физико-математических наук, 2009, №3, с. 101-108.

VOLTER TİP İNTEQRAL TƏNLİYİN HƏLLİNƏ ADAMS ÜSULUNUN TƏTBİQİ

Q.Y.MEHDİYEVA, R.R.MİRZƏYEV, A.M.QULİYEVA, T.M.ƏSGƏROV

XÜLASƏ

İi növ Volter inteqral tənliklərinin həlli üçün bəzi üsullar sinfi mövcuddur. Lakin bu üsulların üstün və çatışmayan cəhətləri var. Burada təklif olunan üsul onunla fərqlənir ki, bu üsulun qurulmasında məlum Adams üsullarından istifadə olunur. Əgər nəzərə alsaq ki, Adams üsullarının sinifləri mövcuddur, onda bu cür yanaşmanın üstünlüyü aşkar olacaqdır. Burada Volter inteqral tənliyinin həlli üçün konkret üsul və alqoritm qurulub.

Açar sözlər: Adams üsulu, Volter inteqral tənliyi, Koşi məsələsi, hibrid üsullar.

AN APPLICATION OF THE ADAMS METHOD TO SOLVING AN INTEGRAL EQUATION OF VOLTERRA TYPE

G.Yu.MEHDİYEVA, R.R.MİRZAYEV, A.M.GULİYEVA, T.M.ASKEROV

SUMMARY

There are some classes of methods for solving the second type Volterra integral equations. However, each of these methods has its advantages and disadvantages. The proposed method differs from the known methods as its construction uses the known Adams methods. If we consider that there is a class of Adams methods, then the advantage of such approach is obvious. Here are constructed concrete methods and algorithm for their application to the solution of the specific Volterra integral equation.

Key words: Adams methods, the Volterra integral equation, Cauchy problem, hybrid methods.

Поступила в редакцию: 20.05.2014 г.

Подписано к печати: 04.07.2014 г.